ثا/ جبرية محمد — الجداء السلمي في الفضاء / وسعة 10 — 3 علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

التمرين 1: A، B، C ثلاث نقط من الفضاء

$A(2,0,2)$; $B(4;0;0)$; $C(1,-2,1)$

$D(-1,1,0)$; $E(1,-1,2)$

1. أثبت أن النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة.
2. أثبت أن $\vec{DE}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

التمرين: 23، 24 ص 210

التمرين 2: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان حيث:

$\|\vec{u}\| = 6$; $\|\vec{v}\| = 8$; $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 10$

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

التمرين 3: عين معادلة المستوي الذي يشمل A وشعاعه الناظمي $\vec{n}$:

1. $A(1;0;5)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$
2. $A(\frac{1}{2},3,-1)$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2/3\\4\\1\end{pmatrix}$

التمرين 4: $A(-1,2,0)$; $B(-3,4;2)$; $C(1,-2,-1)$

1. بين أن النقط A، B، C تعين مستو.
2. عين الشعاع الناظمي للمستوي (ABC).
3. عين معادلة (ABC)
4. عين المسافة بين النقطة $D(1,2,-2)$ والمستوي (ABC).

التمرين 5: 1) عين معادلة المستوي (ABC) حيث

$A(-1,2,1)$; $B(1,-6,-1)$; $C(2,2,2)$

2) عين معادلة المستوي (P') الذي يشمل $D(1,2,-1)$ ويوازي (ABC).

التمرين 6: نعتبر النقط $A(1,0,-1)$; $B(2,2,3)$; $C(3,1,-2)$ و $D(-4;2;1)$.

1) أثبت أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته
2) أ. بين أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (ABC)
ب. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
3. عين حجم رباعي الوجوه DABC.

التمرين 7: (P) و (Q) مستويان معادلتاهما

$(P): x+y-2z-1=0$; $(Q): x+y+z=0$

$A(2,1,2)$

1. أثبت أن (P) و (Q) متعامدان.
2. عين المسافة بين A وكل من (P) و (Q).
3. استنتج المسافة بين A ومستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q).

التمرين 8: 1) $I(0,1,-1)$ عين معادلة سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها 2.

2) عين معادلة لسطح الكرة (S') ذات القطر [AB]: $A(-1,2,1)$, $B(1,-6,-1)$

3) عين معادلة المستوي المماس لسطح الكرة (S') في A.

التمرين 9: عين مجموعة النقط (E) للنقط M

$\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = \|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\|$

- عين مجموعة النقط (F) للنقط M

$\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = AB$

- نفس السؤال

$\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = \|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\|$

التمرين 10: ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في C.

و (P) مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$\|3\vec{MA}+\vec{MB}\| = 2\|\vec{MB}+\vec{MC}\|$

بين أن

عين (P)

التمرين 11: A، B، C ثلاث نقط من الفضاء

عين في كل حالة مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق

أ) $(\vec{MA}+2\vec{MB})\cdot(\vec{MA}+\vec{MB})=0$

ب) $(\vec{MA}+2\vec{MB})\cdot(\vec{MA}-\vec{MB})=0$

ج) $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 2\vec{MA}\cdot\vec{MC}$

بالتوفيق والسداد

التمرين الأول: اثبات أن النقط A، B، C ليست في استقامية: يكفي إثبات أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

نبحث عن k: $\vec{AC}=k\vec{AB}$

$$\begin{cases}-1=2k\\-2=0 \quad (\text{ممتنع})\\-1=-2k\end{cases}$$

اذن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا، اذن النقط ABC ليست على استقامة واحدة.

2. $\vec{DE}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) معناه $\begin{cases}\vec{AB}\perp\vec{DE}\\\vec{AC}\perp\vec{DE}\end{cases}$

لدينا: $\vec{DE}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{DE}=0$ و $\vec{AC}\cdot\vec{DE}=0$

معناه $\vec{DE}$ ناظمي لـ (ABC).

معادلة (ABC): $(ABC): 2x-2y+2z+d=0$

لكن $B\in(ABC)$: $2(4)-0+0+d=0$ ومنه $\boxed{d=-8}$

$(ABC): 2x-2y+2z-8=0$

التمرين 3: $(P): x-y+0z+d=0$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

لكن $A\in(P)$: $d+1=0$ اذن $\boxed{d=-1}$

$(P): x-y+1=0$

التمرين 4: C, B, A تعين مستوي معناه النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة: معناه أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$

2. تعيين الشعاع الناظمي لـ (ABC):

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (ABC) معناه $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\\vec{n}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\\2a-4b-c=0\end{cases}$

بالجمع: $-2b+c=0$ اذن $\boxed{c=2b}$

ومنه: $2a-4b-2b=0$: $2a=6b$

اذن $\boxed{a=3b}$

نأخذ على سبيل المثال: $b=1$; $\begin{cases}a=3\\c=2\end{cases}$

ومنه $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (ABC).

3. معادلة (ABC): $3x+y+2z+d=0$

لكن $A(-1;2;0)$ نقطة من (ABC) اذن:

$3(-1)+2+2(0)+d=0$; $d-1=0$

ومنه $\boxed{d=1}$

$$\boxed{(ABC): 3x+y+2z+1=0}$$

4. المسافة بين $D(1;2;-1)$ و (ABC):

$$d(D,(ABC))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(D,(ABC))=\frac{|3(1)+2+2(-1)+1|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$d(D,(ABC))=\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

التمرين 6: ABC قائم في A لأن: $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ و

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=2+2-4=0$

$\begin{cases}AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}\\AC=\sqrt{6}\end{cases}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{21}$

$$\boxed{S_{ABC}=\frac{3}{2}\sqrt{14}}$$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ ABC: $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{AB}\\\vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$: $\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{AC}=0$

ومنه: $\vec{n}$ ناظمي لـ ABC

معادلة (ABC): $2x-3y+z+d=0$

لكن $A\in(ABC)$: $2(1)-3(0)-1+d=0$

$\boxed{d=-1}$

ومنه: $\boxed{(ABC): 2x-3y+z-1=0}$

3. حجم رباعي الوجوه $DABC$:

$V_{DABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h$

h: ارتفاع حجم رباعي الوجوه $DABC$:

$$h=d(D,(ABC))=\frac{|2(-4)-3(2)+1-1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}$$

$\boxed{h=\sqrt{14}}$

ومنه: $V_{DABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{14}\times\sqrt{14}$

$$\boxed{V_{DABC}=7\ u.v}$$

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MH}$

H مركز ثقل المثلث ABC

(H: مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$)

$||-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}||=||\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}||$ ومنه

$||3\vec{MG}||=||3\vec{MH}||$

ومنه : $MG=MH$: مجموعة النقط هي المستوى محور $[GH]$.

$||-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}||=AB$

$3MG=AB$

ومنه : $MG=\frac{AB}{3}$: مجموعة النقط هي سطح الكرة ذات المركز G ونصف القطر $\frac{AB}{3}$.

$||-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}||=||2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}||$

لدينا $2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}=2\vec{MA}-(\vec{MA}+\vec{AB})-(\vec{MA}+\vec{AC})$

$=-\vec{AB}-\vec{AC}$

$2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}=-2\vec{AD}$ (D منتصف $[BC]$)

ومنه $||-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}||=||2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}||$

$||3\vec{MG}||=||-2\vec{AD}||$

ومنه : $MG=\frac{2}{3}AD$

سطح كرة مركزها G، ونصف قطرها $\frac{2}{3}AD$.

التمرين 11 :

① $(\vec{MA}+2\vec{MB})\cdot(\vec{MA}+\vec{MB})=0$

$3\vec{MG}\cdot2\vec{MI}=0$ (I منتصف $[AB]$ ، G مرجح $\{(A,1);(B,2)\}$)

$6\vec{MG}\cdot\vec{MI}=0$

ومنه : $\vec{MG}\cdot\vec{MI}=0$: سطح الكرة ذات القطر $[IG]$

② $(\vec{MA}+2\vec{MB})\cdot(\vec{MA}-\vec{MB})=0$

$3\vec{MG}\cdot\vec{BA}=0$

ومنه : $\vec{MG}\cdot\vec{BA}=0$: المستوى العمودي على (AB) ويشمل G.

③ $\vec{MA}\cdot\vec{MB}-2\vec{MA}\cdot\vec{MC}=0$

$(\vec{MB}-2\vec{MC})\cdot\vec{MA}=0$

$-\vec{MH}\cdot\vec{MA}=0$ (H مرجح $B(1);C(-2)$)

$\vec{MH}\cdot\vec{MA}=0$

سطح كرة ذات القطر $[AH]$.

التمرين 7 :

$(P): x+y-2z-1=0 ; \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$(Q): x+y+z=0 ; \vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1- نبين أن $(P)\perp(Q)$: $\vec{n}\perp\vec{n'}$

نتحقق : $\vec{n}\cdot\vec{n'}=1+1+1(-2)=0$

ومنه (P) و (Q) متعامدان.

2- $d_1=d(A,(P))=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $d_2=d(A,(Q))=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

3. $d=d(A,(\Delta))$

(Δ): مستقيم تقاطع (P) و (Q)

لدينا :

$d^2=d_1^2+d_2^2$

$A(2,1,2)$

$d^2=(\frac{\sqrt{6}}{3})^2+(\frac{5\sqrt{3}}{3})^2$

$d^2=9$

ومنه $d=3$

التمرين 8 :

$(S): (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2^2$

$x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$

2) معادلة سطح الكرة (S') ذات القطر $[AB]$.

نقطة من الفضاء $M(x,y,z)$

$M\in(S')$ معناه $\vec{AM}\perp\vec{BM}$

$\vec{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y+6\\z+1\end{pmatrix}$ $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$

$\vec{AM}\cdot\vec{BM}=0$

ومنه : $(x-1)(x+1)+(y+6)(y-2)+(z+1)^2=0$

(S') : $x^2+y^2+z^2+4y=14$

3) معادلة المستوى المماس لسطح الكرة (S') في A :

$M\in(P)$ معناه $\vec{AM}\perp\vec{AB}$

$2(x+1)-8(y-2)-2(z+1)=0$

$2x+2-8y+16-2z+2=0$

$2x-8y-2z+20=0$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}$

$(P): x-4y-z+10=0$

التمرين 9 :

$-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}=3\vec{MG}$

G مرجح $\{(A,-1);(B,2);(C,2)\}$